2

Il concetto di Segnale

Segnali finiti ed infiniti, spettro di frequenza

La prima idealizzazione che serve per poter trattare matematicamente i segnali audio è quella di schematizzarli con una funzione $s(t)$ che associa ad ogni istante di tempo t un valore finito reale (positivo, negativo o nullo) che rappresenta la legge di variazione di una grandezza fisica di vara natura (acustica, elettrica, ottica, ecc.) La pressione prodotta da un suono, il campo elettromagnetico irradiato da un'antenna, la tensione in uscita da un microfono, sono esempi di segnali. Un segnale fornisce quindi informazioni sullo stato di un sistema fisico e in questo senso può essere pensato come il risultato di un procedimento di misura.

Al termine segnale si contrappone talvolta quello di **rumore** che sta ad indicare ogni fenomeno che, in analogia ai fenomeni acustici da cui prende il nome, tende a disturbare la corretta ricezione del segnale. Ovviamente la distinzione tra segnale e rumore è soggettiva, quello che in un contesto è rumore in un altro può essere considerato **informazione**.

I segnali di durata infinita sono una idealizzazione che evita la complicazione di dover definire l'inizio e la fine del segnale. Da un punto di vista pratico, per noi che ci interessiamo alle frequenze audio, ogni segnale più lungo di un minuto si può considerare infinito.

Il primo esempio di segnale infinito che viene in mente è l'alimentazione a 50 Hz della rete elettrica. Dato un segnale si può definire la sua **energia** (nel caso della rete la bolletta che si paga per avere quel segnale), e la sua **potenza** (quanta luce fa una lampadina attaccata a quella spina).

Nel caso del segnale a 50 Hz (a parte i disturbi) tutta la potenza è concentrata su di una sola frequenza; nel caso di un segnale musicale invece, la potenza è suddivisa tra varie frequenze: una **nota** di uno strumento ha una **frequenza fondamentale** (che dà il nome alla nota stessa) e le **armoniche** (che determinano il timbro dello strumento). Se il segnale è più complicato (un pezzo d'opera con accompagnamento e rumori ambientali) pressoché tutte le frequenze sono presenti, magari in minima parte, ma dal punto di vista della riproduzione audio tradizionalmente viene considerato solo l'intervallo **20 Hz - 20 Khz** che rappresenta le frequenze udibili da esseri umani giovani e sani.

Classificazione dei segnali

Classificazione fenomenologica

- **Segnali determinati**

Un segnale si dice **determinato** se è perfettamente noto e rappresentabile con una funzione che ne specifica l'andamento in ogni istante; il suo studio può quindi essere affrontato con i metodi della Analisi Matematica. Ad esempio sono determinati taluni segnali di prova usati in laboratorio o quelli generati per produrre energia elettrica.

- **Segnali aleatori**

Un **segnale aleatorio** non è completamente noto a priori, cioè prima che sia disponibile, ma può assumere un andamento qualunque entro una classe di funzioni specificata da alcune caratteristiche **medie** dette **proprietà statistiche**; pertanto i segnali aleatori hanno come modello matematico i **processi aleatori** e il loro studio richiede che si faccia ricorso a modelli probabilistici.

Classificazione morfologica

- **Segnali a tempo continuo**

Detti anche **segnali continui**, sono quelli che hanno come **dominio** della variabile l'insieme dei numeri reali.

- **Segnali a tempo discreto**

Detti anche **segnali discreti** o **sequenze**, sono quelli che hanno come **dominio** della variabile l'insieme dei numeri relativi (interi con segno) o più in generale un insieme del tipo

$$\{ \ldots, -2\,\Delta T, -\Delta T, 0, \Delta T, 2\,\Delta T, \ldots \},$$

in questo caso all'intervallo ΔT si dà il nome di **quanto temporale**.

- **Segnali ad ampiezza continua**

Sono quelli che hanno come **codominio** l'insieme dei numeri reali.

- **Segnali ad ampiezza discreta (o quantizzata)**

Sono quelli che hanno come **codominio** un insieme finito, detto **alfabeto**, oppure infinito numerabile.

Esempi concreti

- **Segnali analogici**

Sono segnali a tempo continuo e ad ampiezza continua e rappresentano la grande maggioranza dei segnali fisici (suono, segnali radar, segnali sismici, ecc.).

- **Segnali campionati**

Sono segnali a tempo discreto e ad ampiezza continua (valori meteorologici, economici, i numeri pseudo-casuali generati al computer, ecc.) Si possono anche ottenere per **campionamento** di segnali analogici estraendo una successione di valori (**campioni**) regolarmente spaziati di Δ secondi.

- **Segnali quantizzati**

Sono segnali a tempo continuo e ad ampiezza discreta. Si possono anche ottenere per **quantizzazione** di segnali analogici approssimando l'ampiezza del segnale al più prossimo tra un numero finito di livelli equispaziati. Sono di difficile, se non impossibile, realizzazione fisica in quanto in genere anche il tempo deve venire discretizzato

- **Segnali digitali (o numerici)**

Sono segnali a tempo discreto e ad ampiezza discreta e si ottengono in genere per campionamento e successiva quantizzazione dei segnali analogici. Come esempio di segnale intrinsecamente numerico si pensi alla successione dei numeri del lotto estratti su una determinata ruota.

Classificazione in base all'energia

Si definisca

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(t)dt$$

ovvero se ne consideri il valore principale nel senso di Cauchy; allora si definisce **energia** di un segnale continuo *s(t)*, reale o complesso, l'integrale

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

La definizione acquista significato fisico quando il segnale è reale, in tal caso, infatti, supponendo che *s(t)* rappresenti la tensione applicata o la corrente immessa ad una resistenza di 1 Ohm, *E* è l'energia da essa dissipata.

Si definisce **potenza media** di un segnale continuo *s(t)*, il limite:

$$P = \frac{1}{2T} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt$$

Segnali a energia finita

Il segnale $s(t)$ è detto ad **energia finita** se E è finito e diverso da zero.

Segnali a potenza media finita

Il segnale $s(t)$ è detto a **potenza media finita** se P è finito e diverso da zero.

Si noti che se un segnale ha energia finita la sua potenza media è nulla e se un segnale ha potenza media finita la sua energia è infinita, pertanto le due classi sono disgiunte.

Segnali periodici

Una classe importante di segnali a potenza media finita è costituito dai **segnali periodici**; in tal caso l'energia è **infinita** e la potenza media coincide con quella calcolata in un periodo.

Dominio del tempo e dominio della frequenza

Dato un segnale **infinito** il suo contenuto in frequenza (il suo **spettro**) su può ottenere con una operazione matematica detta **Integrale di Fourier**.

Il risultato dell'Integrale di Fourier di $s(t)$ è una funzione a valori complessi $S(\omega)$ definita tra meno infinito e più infinito. I valori complessi portano con sé l'informazione relativa alla fase del segnale. Per esempio se si considera il segnale emesso da un sistema di altoparlanti multivia, spostando la posizione del tweeter cambia la fase del segnale e non il suo contenuto in frequenza, in altri termini il valore assoluto dell'Integrale di Fourier resta lo stesso.

L'integrale di Fourier è reversibile, nel senso che a partire dal contenuto in frequenza si può costruire esattamente il segnale originale. Ricordo che stiamo parlando di operazioni matematiche svolte su segnali infiniti lavorando con quantità senza errori, in altra parola segni di lapis su di un pezzo di carta ed esattamente va inteso in questo senso.

Di solito quando si parla di spettro di un segnale si trascura la fase e si considera $|S(\omega)|$ (oppure se ci interessa la potenza espressa in decibel la quantità $20 \text{ Log}_{10} | S(\omega)|$). In entrambi i casi si può dimostrare che la parte positiva e la parte negativa delle funzioni risultanti sono specularmente uguali e quindi di solito se ne disegna solo la parte positiva. Con questa semplificazione però si perde la reversibilità e quello che resta è solo una misura effettuata sul segnale, priva dell'informazione completa.

Per comprendere appiano il significato dell'integrale di Fourier sono necessari alcuni preliminari matematici.

L'Analisi di Fourier

L'analisi armonica è la branca della matematica che studia la rappresentazione delle funzioni o dei segnali come sovrapposizione di onde fondamentali. Indaga e generalizza la nozione di serie di Fourier e trasformata di Fourier. Le onde fondamentali sono chiamate **armoniche**, da cui il nome **analisi armonica** che ha applicazioni in diverse aree come elaborazione numerica dei segnali e immagini, meccanica quantistica e neuroscienze.

Serie di Fourier

Data una funzione *s(t)* reale o complessa a quadrato sommabile, periodica di periodo 2π, per ogni *n* intero esistono i coefficienti complessi

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} s(t)\,dt$$

e la funzione può essere rappresentata come

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

nel caso *s(t)* sia reale si può sfruttare la relazione di Eulero

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

e scrivere

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\, s(t)dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\, s(t)dt,$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

complicandosi decisamente la vita.

L'interpretazione dello sviluppo in serie di Fourier è che un segnale periodico di potenza finita (a questo equivale la condizione del quadrato sommabile) si può sviluppare come combinazione lineare di funzioni periodiche semplici la cui frequenza è un numero intero. Questo fatto venne scoperto empiricamente secoli fa quando furono sviluppati gli strumneti a corda.

Il tutto si generalizza facilmente al caso in cui il periodo sia T e quindi la frequenza fondamentale abbia il valore $1/T$.

In musica questo fatto si esprime dicendo che una nota tenuta indefinitamente è composta da una fondamentale (440 Hz se per esempio si suona il la principale) nonché una serie di armoniche la cui struttura determina il timbro e permette di distinguere un flauto da un violino e da un pianoforte.

Il "di più" dato dalla formula è che tutta l'informazione di una funzione periodica continua può essere espressa con un infinità numerabile (quindi discreta) di valori complessi.

Integrale di Fourier

Data una funzione *s(t)* reale o complessa a quadrato sommabile, sotto opportune condizioni analitiche, che in questo ambito trascuriamo, vale la coppia di trasformate

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} s(t) dt$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S(\omega) d\omega$$

La funzione *S(ω)* viene detta **integrale di Fourier** o **Trasformata continua di Fourier** (**CFT**) della funzione *s(t)*. L'integrale di Fourier permette di sviluppare una funzione non periodica nelle sue componenti di frequenza. Si dice che si passa dal **dominio del tempo** al **dominio della frequenza**. Una proprietà fondamentale della CFT è che quanto è più *concentrata* la funzione *s(t)* tanto più *dispersa* è la trasformata *S(ω)* e viceversa.

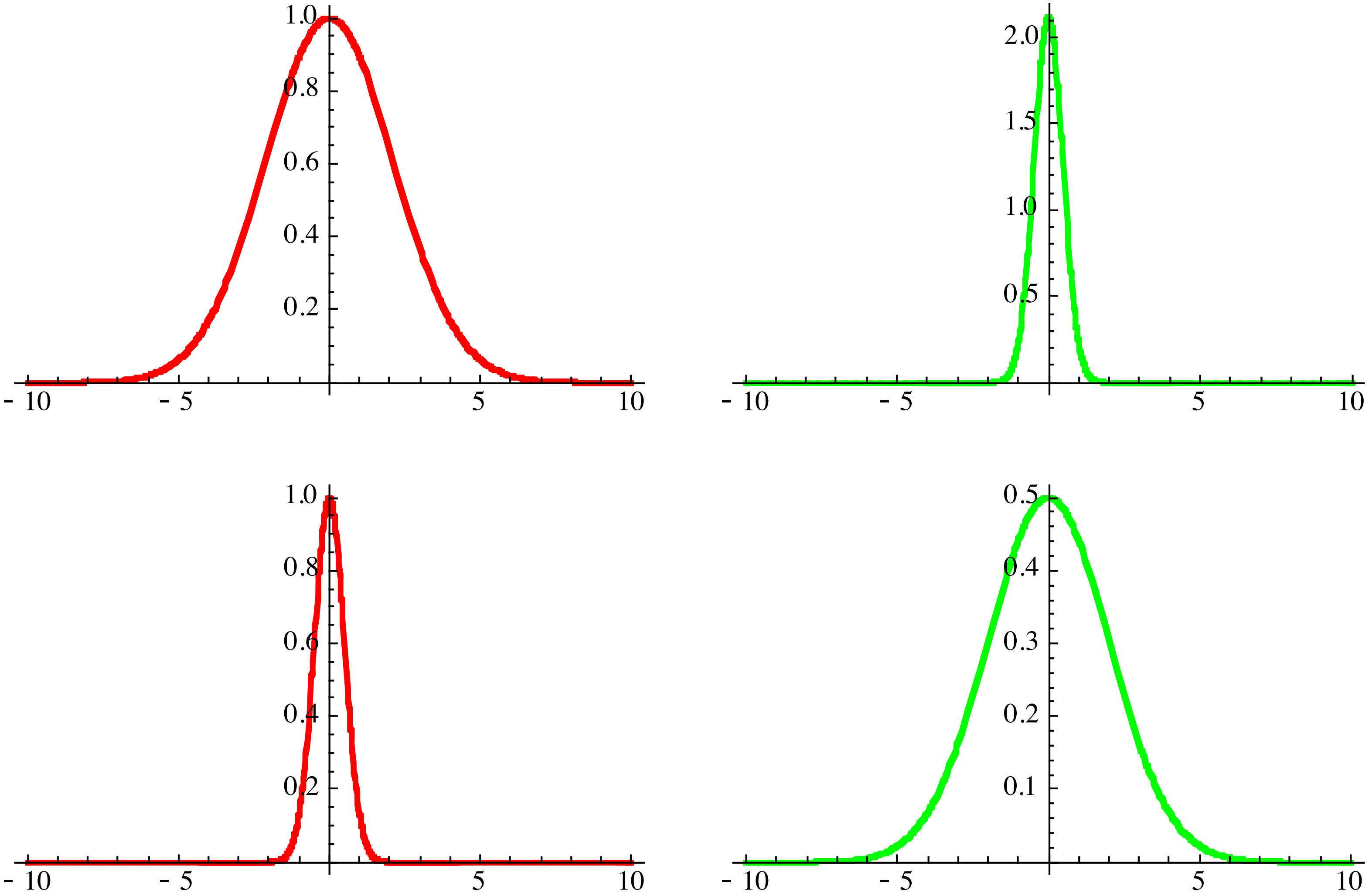
La variabile ω è detta **pulsazione** ed è collegata alla frequenza dalla relazione

$$\omega = 2\pi f$$

Vediamo alcuni esempi di coppie di trasformate.

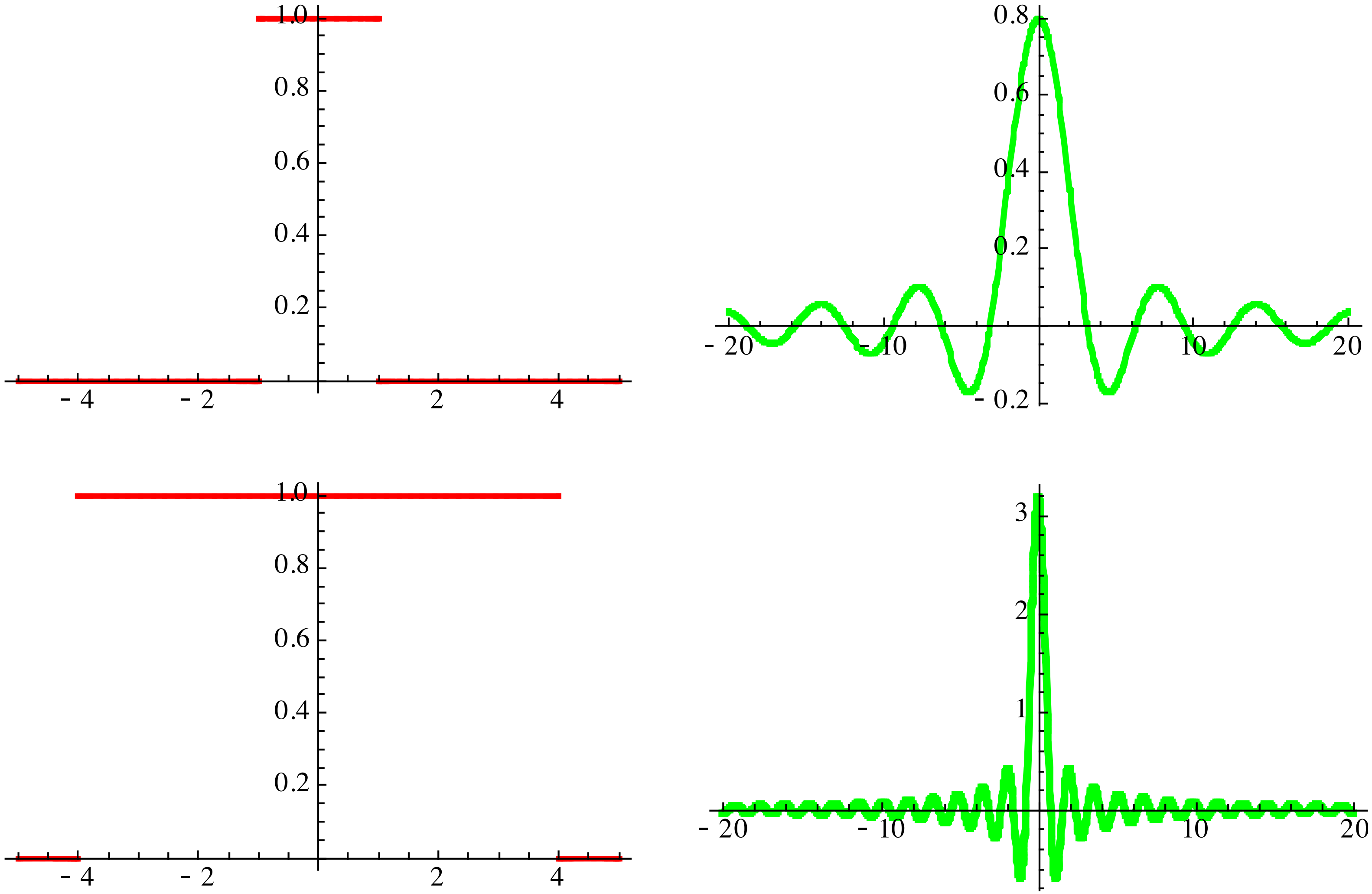
Gaussiana

La CFT di una gaussiana è ancora una gaussiana.



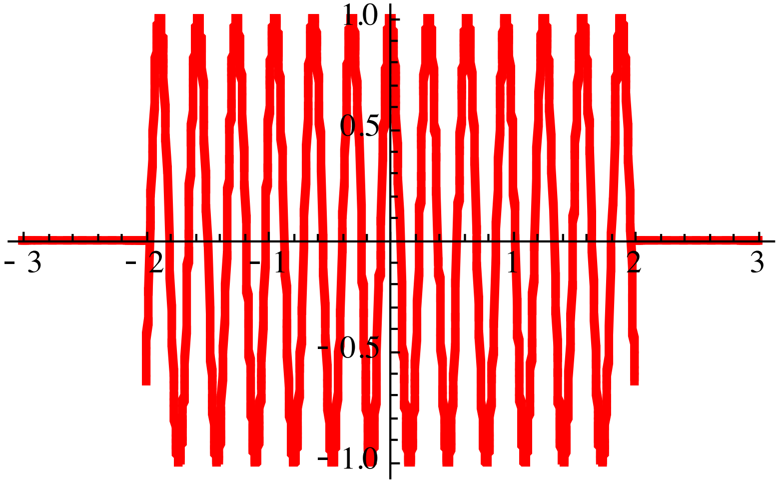
Impulso rettangolare

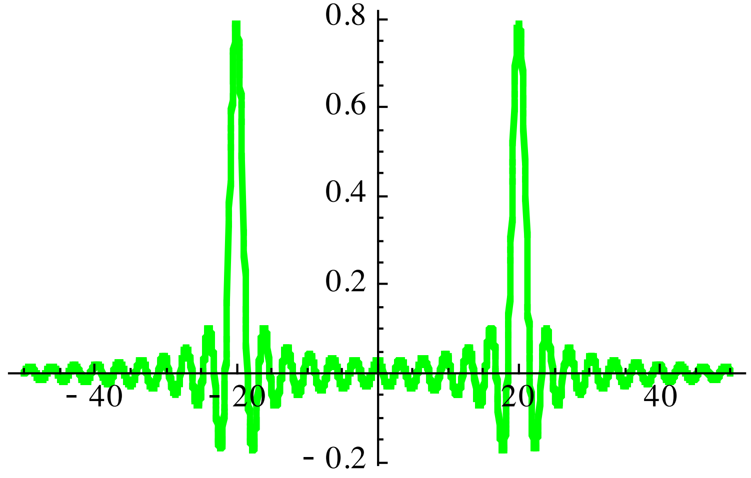
La CFT di un impulso rettangolare è la funzione sinc(t) = sin(a t)/t.



Sinusoide troncata

La CFT di una sinusoide troncata è una coppia di sinc





La delta di Dirac

Consideriamo una successione di impulsi (per esempio rettangolari o sinc o gaussiani) con integrale costante uguale ad 1 e ampiezza decrescente, in tutti e tre i casi la successione converge ad una funzione generalizzata $\boldsymbol{\delta(t)}$ che nello 0 vale infinito, da tutte le altri parti vale 0 e ha integrale 1 e per cui vale la proprietà caratteristica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

In modo più preciso si può dire che la delta di Dirac è **un funzionale** che associa a una funzione continua il suo valore nello zero. Questo oggetto strano è anche chiamato **impulso** e permette, tra l'altro di correlare la CFT con la serie di Fourier. Poiché la trasformata di

$$e^{int}$$

vale

$$\delta(\omega+n)$$

allora dato

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

vale

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \right] dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{int} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega+n)$$

ovvero la trasformata di una funzione periodica è un **pettine**, cioè la somma di infiniti impulsi equispaziati aventi come coefficienti i corrispondente coefficienti della serie di Fourier.

Viceversa la trasformata di un pettine è una funzione periodica, vedremo che questo ultimo risultato è una proprietà fondamentale dei segnali digitali.

Convoluzione

Dati due funzioni $s(t)$ e $h(t)$ si la **convoluzione** di s e h, indicata con $(s*h)(t)$ è una funzione di t definita dall'integrale

$$(s*h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\, h(t-u)du$$

Il **Teorema della Convoluzione** afferma che se $S(\omega)$ e $H(\omega)$ sono le trasformate, rispettivamente, di $s(t)$ e $h(t)$ allora la trasformata di $(s*h)(t)$ è data dal prodotto $S(\omega)\, H(\omega)$.

Trasformata discreta di Fourier (DFT)

Dati N numeri complessi $\{x_0, x_1,\ldots, x_{N\text{-}1}\}$ vale la coppia di trasformazioni:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}, \quad k = 0,\dots,N-1$$

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn}, \quad n = 0,\dots,N-1$$

Si noti che le quantità:

$$W_N^k = e^{-\frac{2\pi i}{N}k}, \quad k = 0,\dots,N-1$$

sono le N radici N-esime dell'unità. La sequenza $\{X_0, X_1,\dots, X_{N\text{-}1}\}$ è detta la **Trasformata Discreta di Fourier** (**DFT**) di $\{x_0, x_1,\dots, x_{N\text{-}1}\}$.

La DFT è l'unica tra le trasformate di Fourier che si può calcolare numericamente ed ha importanti relazioni sia con la serie di Fourier che con l'integrale di Fourier che con il calcolo di operazioni su polinomi. Infatti la DFT può essere interpretata come gli insieme dei valori che il polinomio di grado N-1

$$p(u) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n u^k$$

assume nelle radici N-esime dell'unità.

Inoltre se si valuta una funzione periodica in un numero finito di punti equidistanti e se ne fa la DFT si ottiene un insieme di valori che sotto opportune condizioni analitiche approssimano i coefficienti della serie di Fourier. Si veda in proposito la trattazione in

http://www.di.unipi.it/~romani/DIDATTICA/AD/fourier.pdf

Trasformata veloce di Fourier, FFT

A prima vista la DFT ha una complessità quadratica in N dovendo calcolare N somme di N termini. È però facile dimostrare l'esistenza di un algoritmo che effettua lo stesso calcolo in O(N log N) operazioni.

Per semplicità restringiamoci al caso in cui N è potenza di due e sia $N = 2M$. Si deve calcolare

$$X_k = \sum_{n=0}^{2M-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{2M}kn} = \sum_{n=0}^{2M-1} x_n W_{2M}^{nk}, \quad k = 0,\ldots,2M-1$$

Separiamo le componenti pare e quelle dispari della sommatoria, tenendo conto che

$$W_{2M}^{2nk} = W_M^{nk}$$

si ha

$$X_k = \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n} W_{2M}^{2nk} + \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n+1} W_{2M}^{(2n+1)k} = \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n} W_{M}^{nk} + W_{2M}^{k} \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n+1} W_{M}^{nk}, \quad k = 0, \ldots, 2M-1$$

Ovvero la DFT di ordine 2*M* si può calcolare con due DFT di ordine *M* e *M* moltiplicazioni per una costante complessa. Detta *C(n)* la complessità della DFT di ordine n si ottiene

$$C(n) = 2\,\mathrm{C}(n/2) + \mathrm{O}(n)$$

e quindi

$$C(n) = \mathrm{O}(n \log n))$$

Questa possibilità di calcolare la DFT in un tempo poco superiore al numero di campioni era stata scoperta già da Gauss nel 1800 ma ha trovato la sua applicazione pratica nell'era dei calcolatori. Si può dire che l'algoritmo per la **FFT** (**Fast Fourier Transform**) è uno dei risultati più potenti della matematica computazionale. Dall'imaging medico alla teoria dei segnali, dalla crittografia alle tecniche radar, in quasi ogni campo della matematica computazionale l'uso della FFT costituisce una scorciatoia che fa la differenza tra poter fare e non poter fare un certo calcolo.

Sistemi Lineari invarianti nel tempo

Un **sistema** è una idealizzazione di un processo fisico che trasforma un segnale in un altro e si indica con un operatore Z, ovvero $Z[x(t)] = y(t)$.

Se qualunque valore di q reale vale

$$Z[x(t)] = Z[x(t+q)]$$

il sistema è detto **invariante nel tempo** (**LTI**).

Se per qualunque coppia di segnali $x(t)$ e $y(t)$vale

$$Z[x(t)+ y(t)] = Z[x(t)] + Z[y(t)]$$

il sistema è detto **lineare**.

In natura i sistemi LTI non esistono: ogni oggetto fisico ha un "nascita" e una "morte" e se fornisco ad un amplificatore reale un segnale di un milione di Volt quello prende fuoco ma come idealizzazione sono estremamente importanti, infatti i sistemi LTI godono di una proprietà che ne semplifica enormemente lo studio.

Sia Z un sistema LTI e valga $y(t) = Z[x(t)]$, siano $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ le trasformate di $x(t)$ e $y(t)$, e sia

$$h(t) = Z[\delta(t)]$$

la **risposta all'impulso**, ovvero il risultato della applicazione di Z alla delta di Dirac, allora, indicata, con $H(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $h(t)$ vale

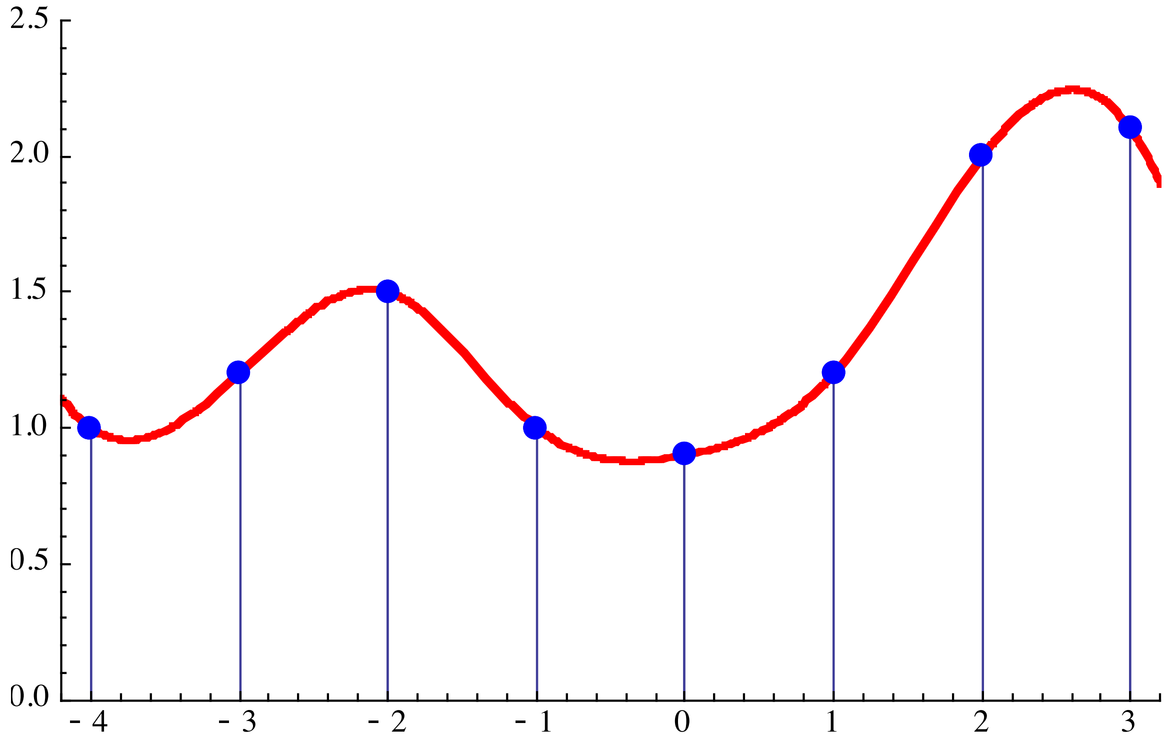
$$Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega)$$

Questo risultato ha alcune importanti conseguenze:

- Il comportamento di un sistema lineare invariante nel tempo è completamente descritto dalla sua risposta all'impulso.
- L'operazione definita da sistema lineare invariante nel tempo è equivalente alla convoluzione del segnale di ingresso con la $h(t)$.
- Nel dominio della frequenza l'operazione definita da sistema lineare invariante nel tempo è equivalente a moltiplicare la trasformata del segnale di ingresso per la $H(\omega)$. Si può dire che il sistema realizza un **filtro**.

Interpolazione e filtraggio

Il problema dell'**interpolazione** si presenta spesso in analisi numerica e consiste nel trovare una funzione continua che passa per un insieme (finito o infinito) di punti. Nella nostra terminologia interpolare vuole dire dato un segnale discreto trovare un segnale continuo tale che i due segnali abbiano gli stessi valori dove sono entrambi definiti.



NB in analisi numerica il problema è più generale e non è detto che in punti in cui viene effettuata l'interpolazione siano equispaziati.

Ovviamente vi sono infinite funzioni continue che soddisfano questa proprietà e in genere la funzione interpolante è cercata all'interno di una classe con proprietà specifiche. Per esempio se i valori da interpolare sono in numero finito vale il teorema

Per n punti di ascissa distinta del piano cartesiano passa uno e un solo polinomio di grado n-1

che è una generalizzazione del fatto che per due punti distinti passa una e una sola retta.

Se le punti da interpolare sono dati da un segnale a tempo discreto $s(t)$ definito dalle relazione

$$s(k\Delta) = y_k \quad k = -\infty, \ldots -1, 0, 1, \ldots, \infty,$$

e $g(t)$ è una funzione continua per cui vale

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(k\Delta) = 0, \quad k = -\infty, \ldots -1, 1, \ldots, \infty \end{cases}$$

allora il sistema LTI che ha la funzione $g(t)$ come risposta all'impulso definisce un funzione continua *r(t)* che interpola *s(t)*, infatti è facile verificare che *r(t)* passa per tutti i punti da interpolare.

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k g(t - k\Delta)$$

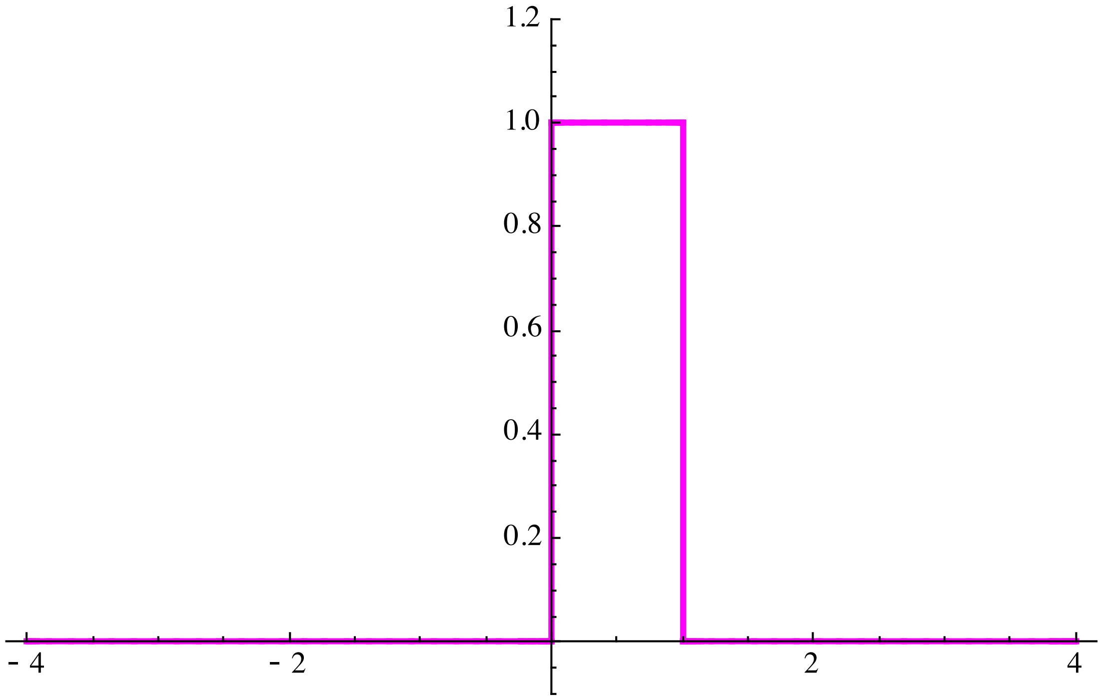
Esempi

- **Interpolazione Sample and Hold**

Consiste nel tenere costante il valore da interpolare fino al valore successivo. La funzione $g(t)$ è definita come segue

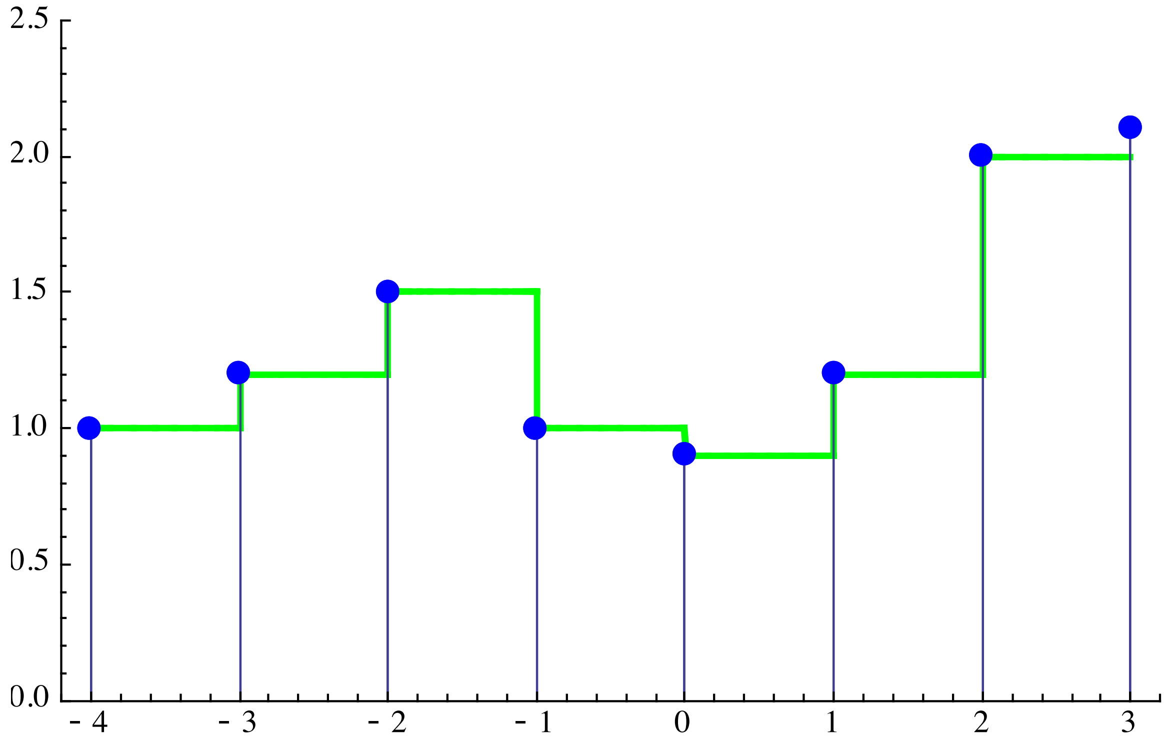
$$\begin{cases} g(t) = 1, & 0 \le t < 1 \\ g(t) = 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e il suo grafico è questo



Il grande vantaggio dell'interpolazione **sample and hold** è che l'implementazione nei circuiti elettronici è la più naturale, richiedendo semplicemente a presenza di un condensatore e una resistenza di valori opportuni.

Vediamo un esempio di come viene l'interpolazione

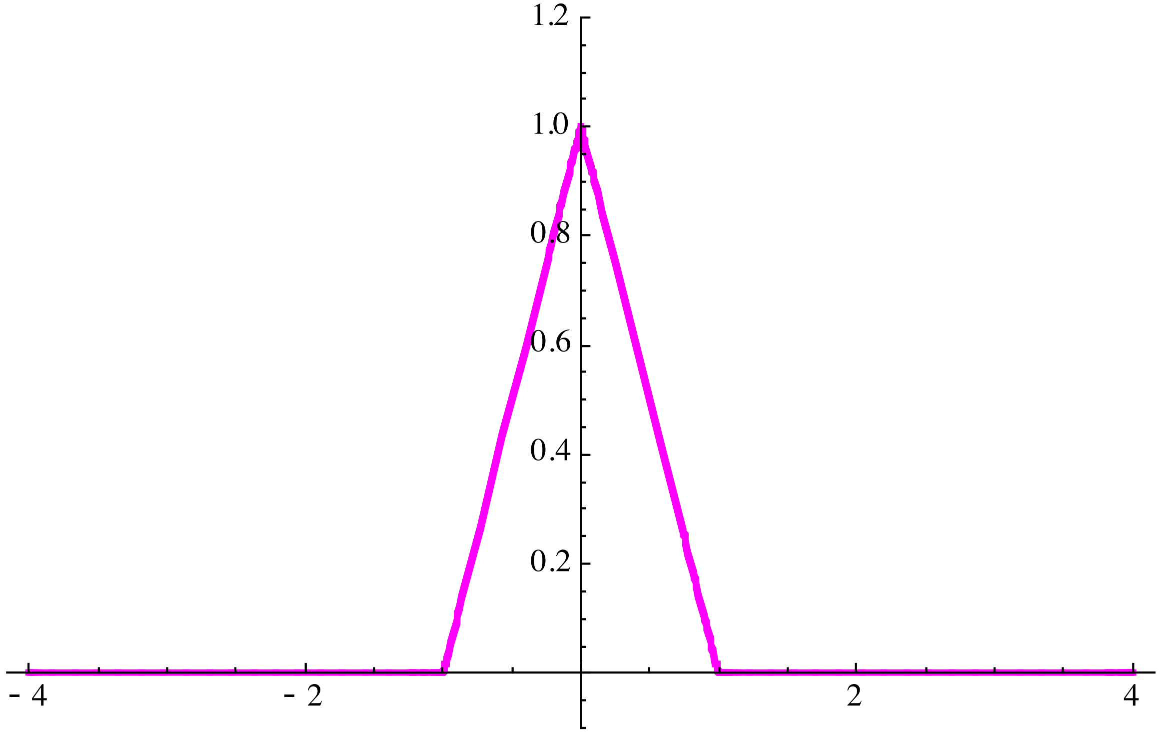


- **Interpolazione lineare a tratti**

Consiste nel unire con un segmento di retta due valore consecutivi. La funzione $g(t)$ è definita come segue

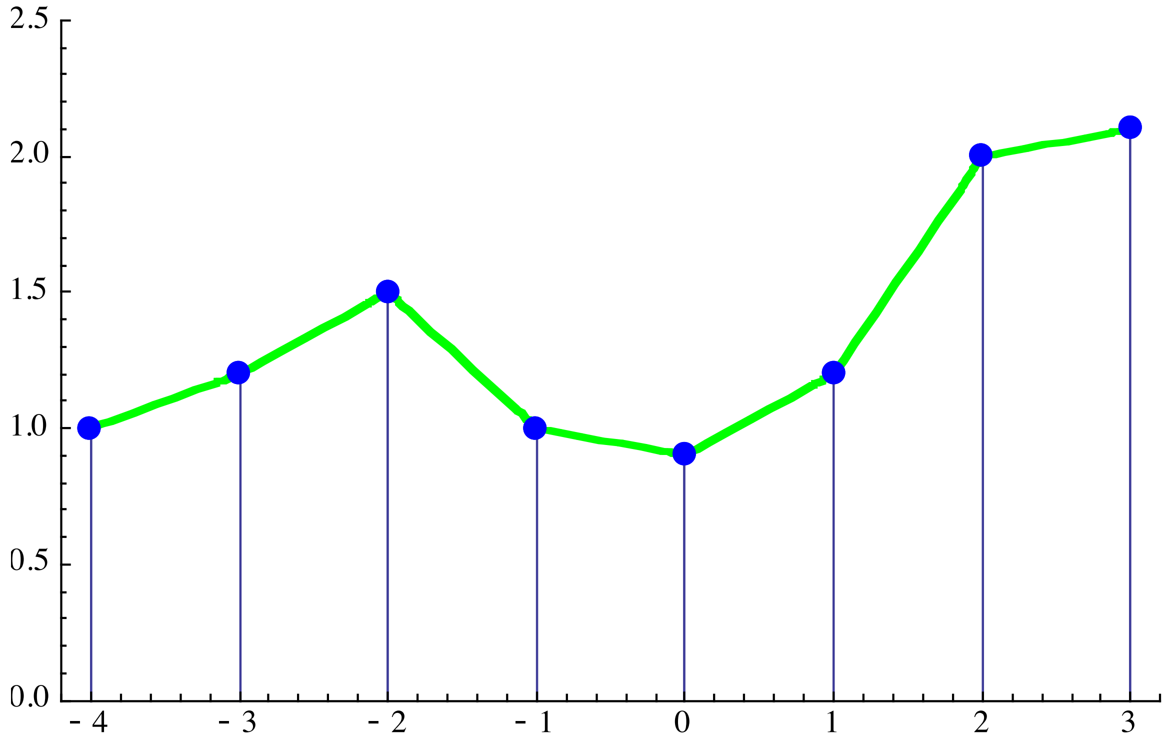
$$\begin{cases} g(t) = 1 + t, & -1 < t \leq 0 \\ g(t) = 1 - t, & 0 < t < 1 \\ g(t) = 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e il suo grafico è questo



Dal punto di vista matematico l'interpolazione **lineare** è più precisa del sample and hold ma non ammette una implementazione elettronica banale.

Vediamo un esempio di come viene l'interpolazione

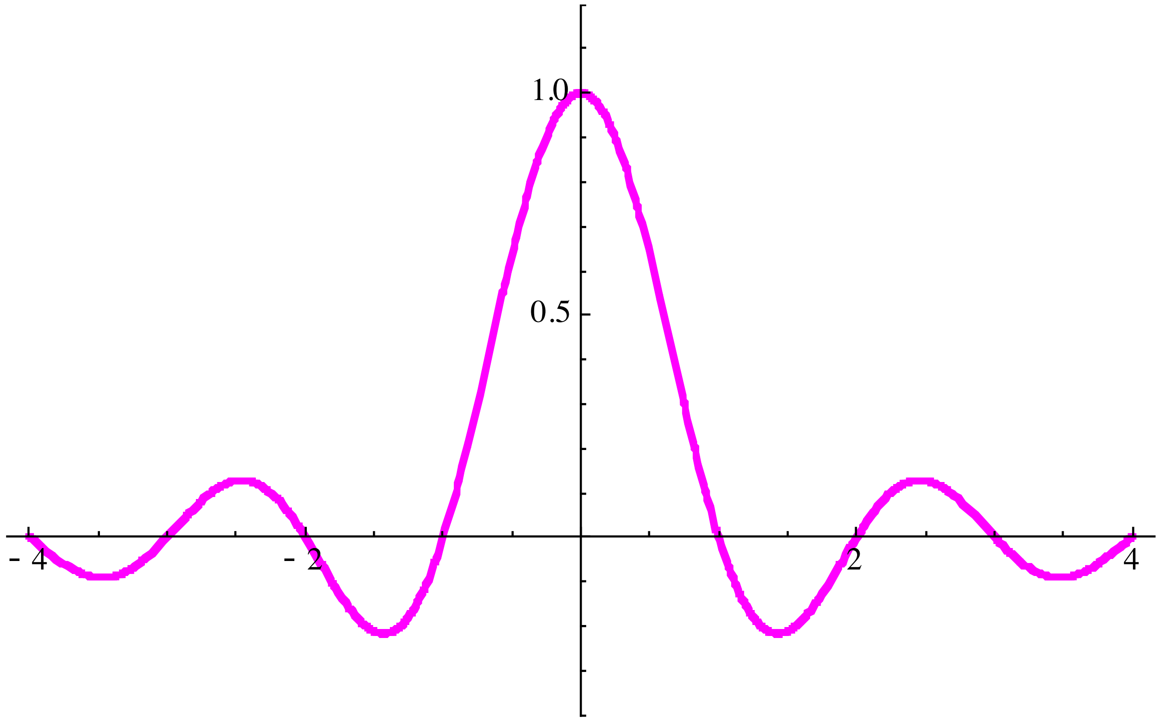


- **Interpolazione sinc**

Questa può sembrare una soluzione cervellotica ma le proprietà matematiche che esibisce ne fanno la soluzione ideale, purtroppo non realizzabile in pratica. La funzione $g(t)$ sfrutta il fatto che la funzione sinc si annulla in infiniti punti equispaziati ed è definita come segue

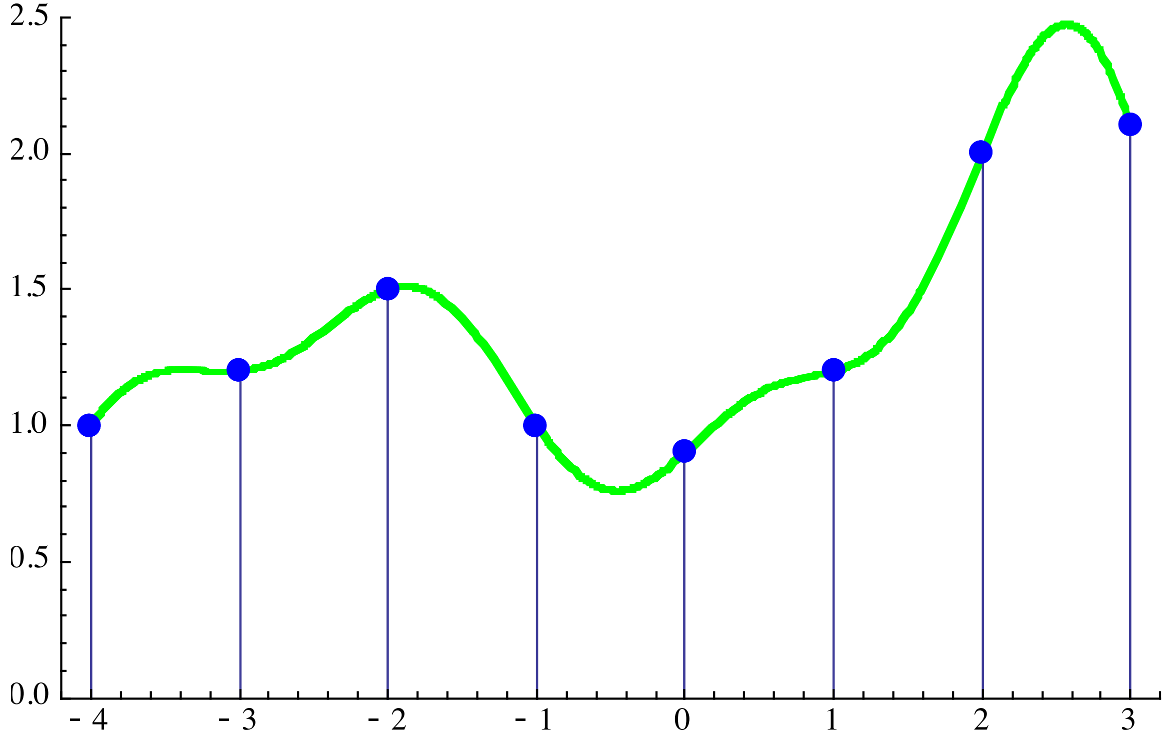
$$g(t) = \frac{\Delta \sin \frac{\pi t}{\Delta}}{\pi t}$$

Il suo grafico è questo



Questa interpolazione non è realizzabile in pratica in quanto la funzione g(t) assume valori su tutta la retta reale, se ne possono dare solo approssimazioni.

Vediamo un esempio di come viene l'interpolazione


2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
- 4
- 3
- 2
- 1
0
1
2
3

Filtri digitali

I filtri digitali permettono di manipolare un segnale digitale alterando il suo spettro. Poiché i filtri digitali sono una trasformazione lineare e invariante nel tempo il loro effetto può essere studiato in modo semplice.

La prima classe di filtri digitali che presentiamo è costituita dai filtri **FIR (Finite Impulse Response)** che generano una nuova sequenza di campioni con una combinazione lineare di un gruppo di campioni consecutivi.

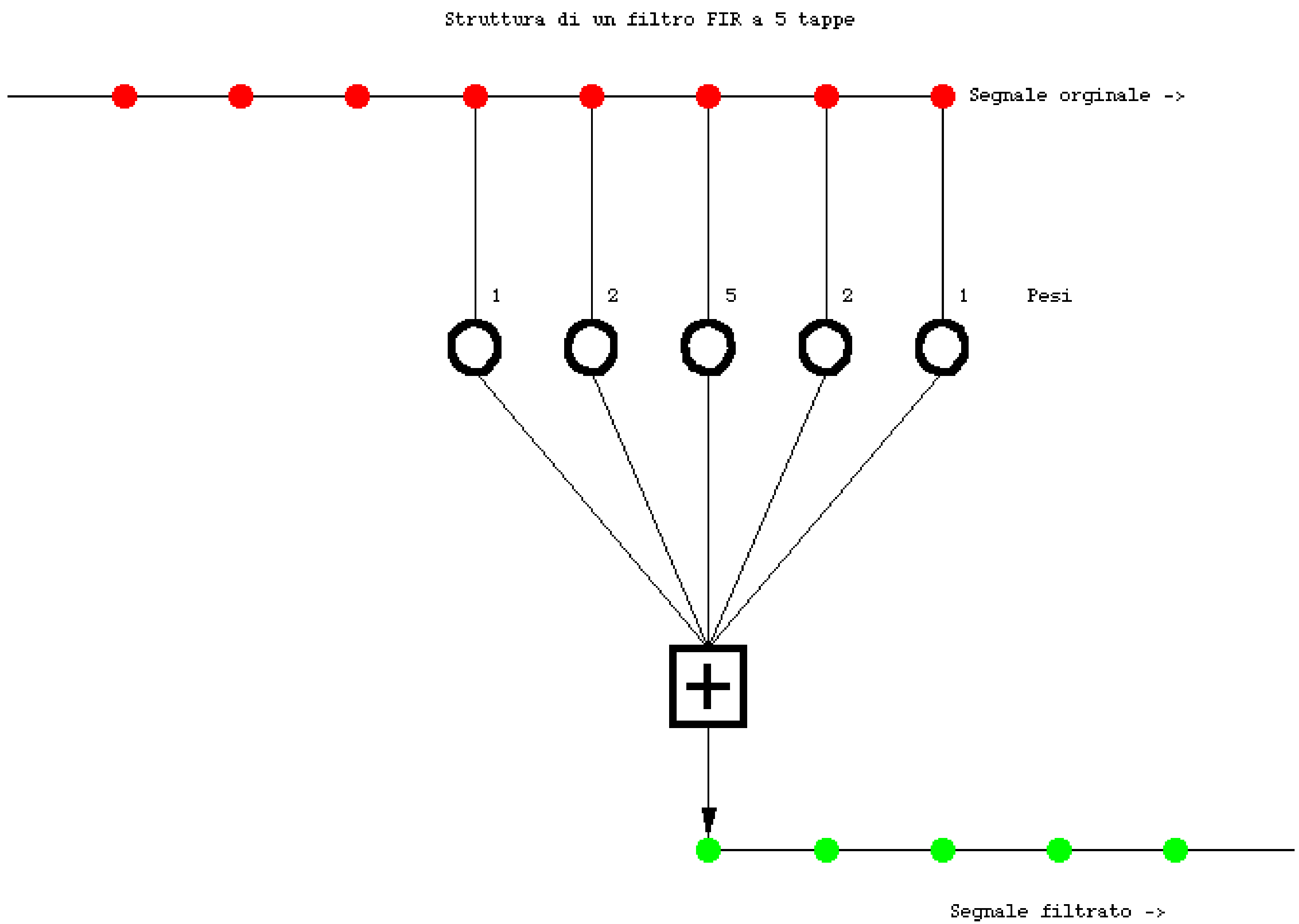
Dato un insieme infinito di valori $\{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ e un insieme finito di k coefficienti $\{a_1, a_2, \ldots\ a_k\}$ l'insieme di valori $\{\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ risultante dalla applicazione del filtro è dato da

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i}$$

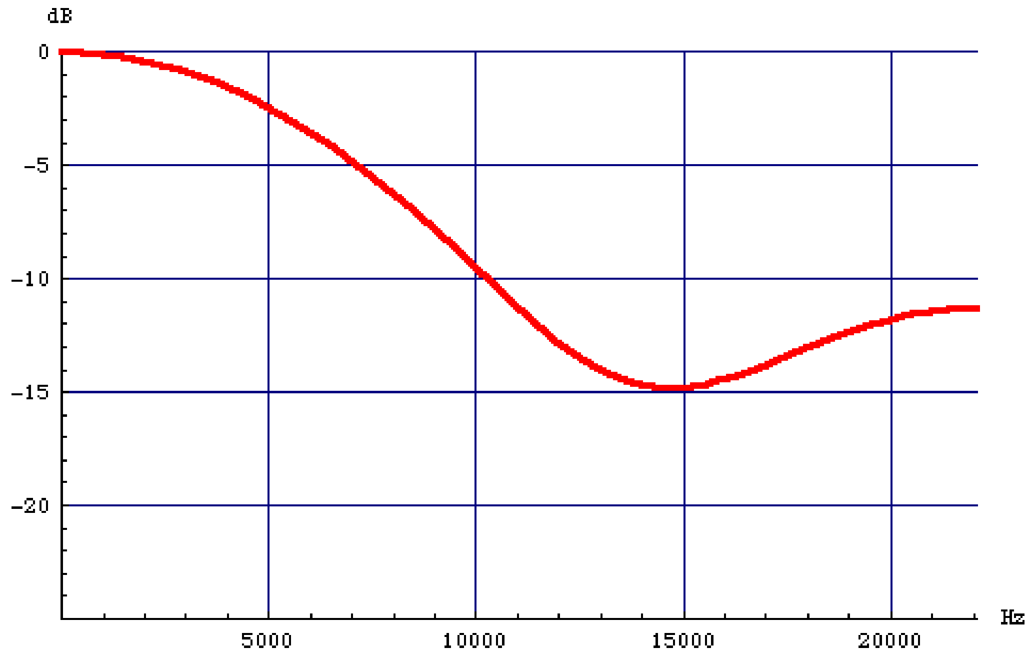
Essendo il filtro un sistema lineare la sua risposta si può facilmente calcolare per via teorica prendendo la trasformata discreta di Fourier della risposta all'impulso.

Spesso si preferisce usare la **Trasformata Z**, una parente della DFT particolarmente adatta a fare i calcoli su segnali discreti.

Nella figura si vede come opera un semplice filtro FIR a 5 coefficienti (detto anche filtro a 5 **tappe**).



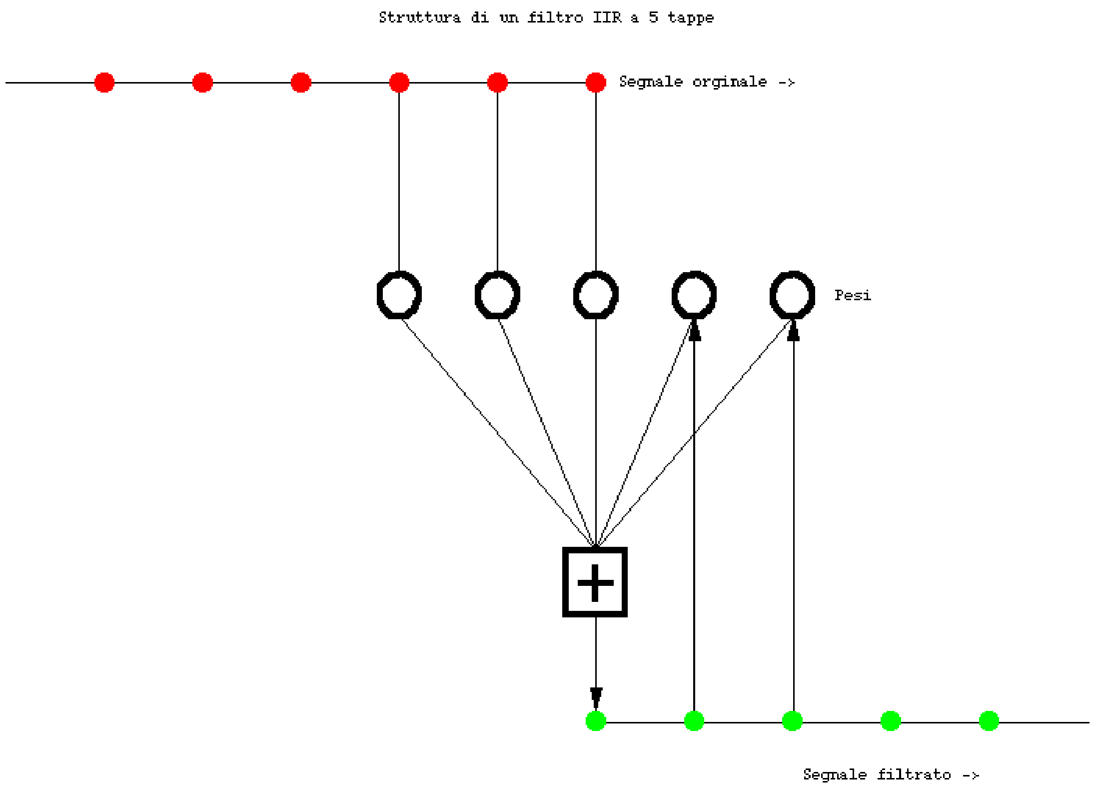
Se i pesi della combinazione lineare sono reali e simmetrici (nel nostro esempio 1,3,5,3,1) il filtro ha funzione di trasferimento reale e simmetrica e non introduce alterazioni di fase. la risposta di un FIR si può calcolare per via teorica, questa è la risposta del filtro in esame:



Esiste anche una altra categoria di filtri digitali I filtri **IIR (Infinite Impulse response)** che hanno un comportamento che somiglia di più (nel bene e nel male) alle reti analogiche. Non sono lineari in fase e matematicamente corrispondono ad un'approssimazione con funzioni razionali. Vale

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i} + \sum_{j=1}^{h} b_j y_{n-j}$$

I filtri IIR sono **ricorsivi** nel senso che ogni valore in uscita dipende anche dai nuovi valori appena calcolati, ciò rende tipicamente infinita la risposta all'impulso (da cui il nome) e può suscitare gravi problemi di instabilità (possibili uscite illimitate anche a partire da ingressi limitati) che devono essere accuratamente studiati. Nella figura si vede come opera un semplice filtro IIR a 5 tappe.

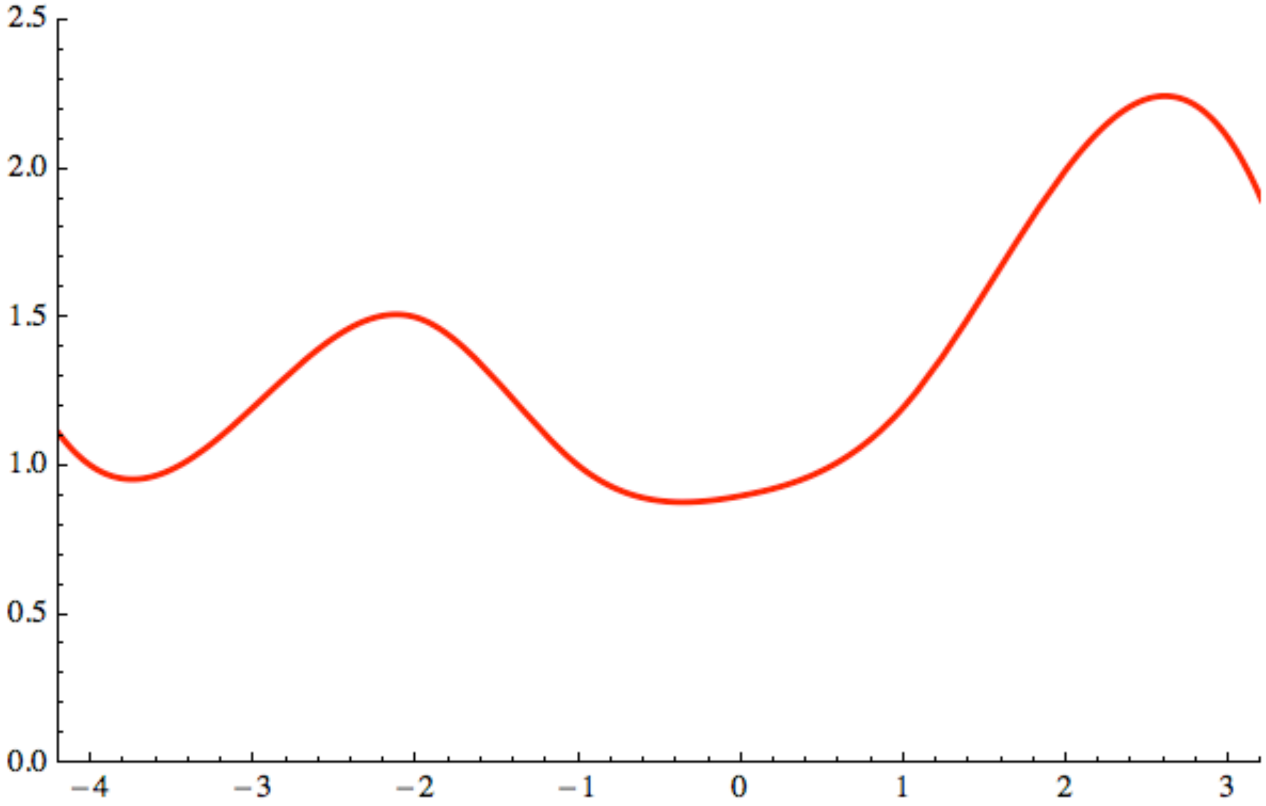


In genere la costruzione di un buon filtro è un arte (come la costruzione di un buon trasformatore per un ampli a valvole) c’è da dire però che nei trasformatori la qualità dei materiali è essenziale e il migliore di essi costa cento volte di più del peggiore. Invece, a parità di numero di tappe, un buon filtro FIR e uno pessimo costano esattamente la medesima cifra.

Il Campionamento

Siamo adesso pronti ad introdurre il concetto di **campionamento**, e passare quindi allo studio dei segnali digitali.

Dato il nostro segnale $s(t)$



consideriamo infiniti suoi valori valutati in istanti di tempo equispaziati di un intervallo Δ

$$\{ \ldots, s(-2\,\Delta), s(-\Delta), s(0), s(\Delta), s(2\,\Delta), \ldots \},$$

matematicamente questa operazione può essere ottenuta attraverso la delta di Dirac, dalla relazione

$$s(k\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta)s(t)dt$$

deriva la forma matematica della funzione campionata

$$s_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta)s(k\Delta)$$

$s_c(t)$ infatti vale zero dappertutto tranne nei punti del campionamento dove ha lo stesso valore di $s(t)$ moltiplicato per l'impulso di Dirac.

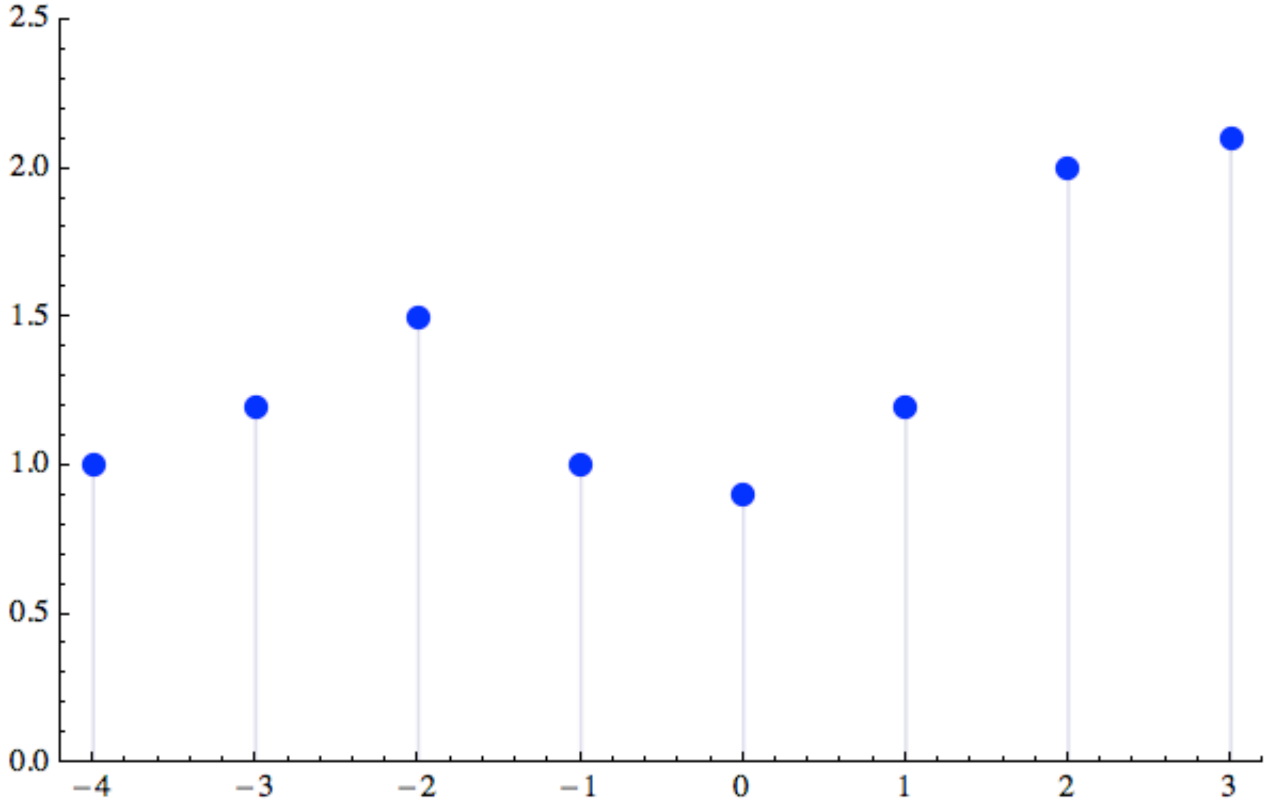
Può sembrare che si stia uccidendo un verme a cannonate ma la cosa è giustificata da un motivo fisico e da un motivo matematico

- Nella realtà fisica è impossibile campionare in un istante di tempo, le capacità (parassite o esplicitamente inserite) fanno sì che il campionamento consista sempre in una operazione di integrazione, ovvero si usa una approssimazione implicita della delta di Dirac.
- L'espressione che usa la delta è una forma di cui è possibile calcolare l'integrale di Fourier.

Poiché il valore di

$$\delta(t - k\Delta)$$

nei punti $k\Delta$ è infinito si preferisce disegnare la funzione $s_c(t)$ attribuendole il valore di $s(k\Delta)$



Da quello che abbiamo visto sopra una funzione campionata è un pettine e la trasformata di un pettine è una funzione periodica. Con un po' di passaggi più raffinati si ottiene la relazione fondamentale:

$$S_c(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega + k\frac{2\pi}{\Delta})$$

Che può essere spiegata nel modo seguente:

La trasformata di una funzione campionata si ottiene sovrapponendo infinite copie (dette **frequenze immagine**) della trasformata della funzione originale spostate ognuna di un valore

$$k\frac{2\pi}{\Delta}, \quad k = -\infty, \ldots -1, 0, 1, \ldots, \infty.$$

Il modo con cui la si costruisce ne garantisce la periodicità e, tenendo conto della relazione

$$\omega = 2\pi f,$$

il periodo in termini della frequenza f vale esattamente $1/\Delta$.

Si noti che questa rappresentazione della funzione campionata è una astrazione matematica che sarà usata per capire esattamente che tipo di errore si commettono nelel approssimazioni usate in pratica.

Il teorema del Campionamento

Dalle proprietà viste sopra discende il teorema che sta alla base di tutto l'audio digitale, Se la funzione $s(t)$ è limitata in banda ovvero se

$$S(2\pi f) = 0, \quad |f| < f_0 = \frac{1}{2\Delta}$$

Allora in un campionamento con intervalli lunghi Δ o ancora minori le varie copie di $F(\omega)$ non interferiscono tra loro è il segnale originale può essere ricostruito con un operazione di interpolazione che elimina tutte le frequenze immagine introdotte dal campionamento. Il valore di frequenza limite f_0 è detto **frequenza di Nyquist**.

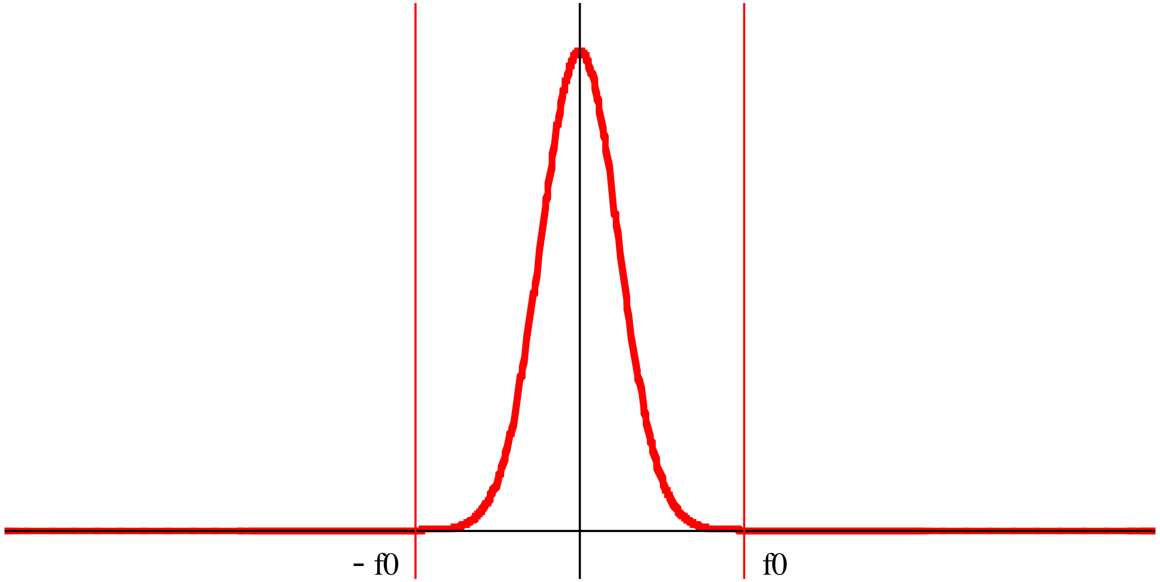
L'interpolazione *magica* che risolve il problema è la terza di quelle viste sopra, infatti la trasformata di un sinc è un impulso rettangolare e se i parametri sono quello giusti lo spettro della funzione campionata viene trasformato in quello della funzione originale.

Più precisamente si dimostra che nell'ipotesi di cui sopra vale **esattamente**

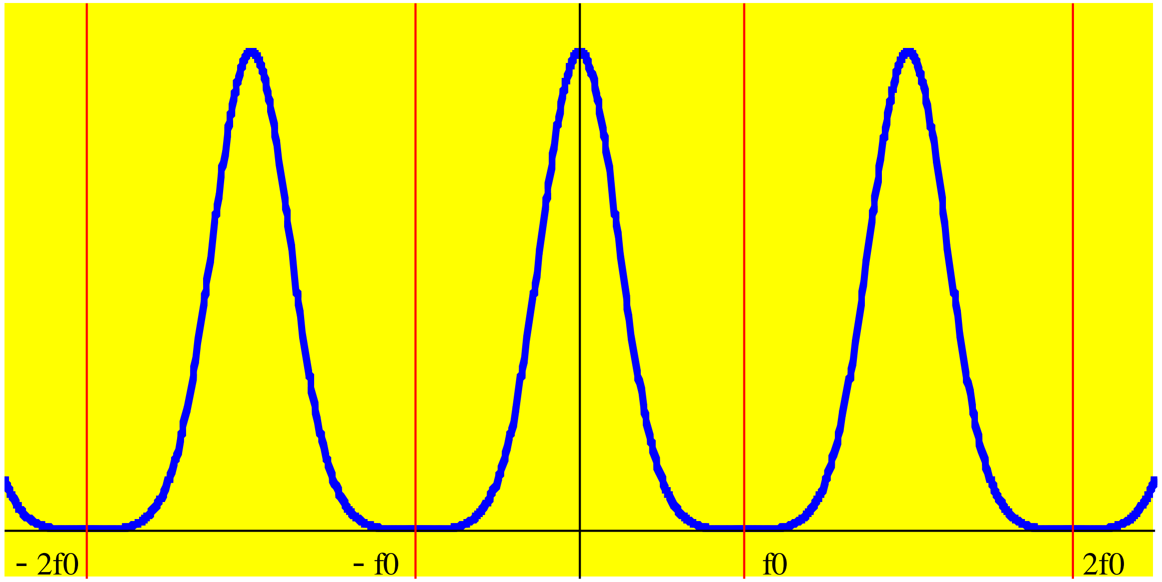
$$s(t) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \frac{\sin \dfrac{\pi(t-k\Delta)}{\Delta}}{\pi(t-k\Delta)}$$

Anche se questa formula dice tutto, la sua interpretazione non è evidente; è molto più facile capire il Teorema del Campionamento attraverso un insieme di figure.

Consideriamo una funzione $s(t)$ la cui trasformata $S(2\pi f)$ sia nulla fuori dall'intervallo delimitato dalle rette rosse verticali di ascissa $\pm f_0$.



Sia ora $s_c(t)$ la funzione campionata con intervallo Δ, la sua trasformata $S_c(2\pi f)$ è periodica e consiste nella ripetizione infinita della parte di trasformata compresa tra le linee rosse.

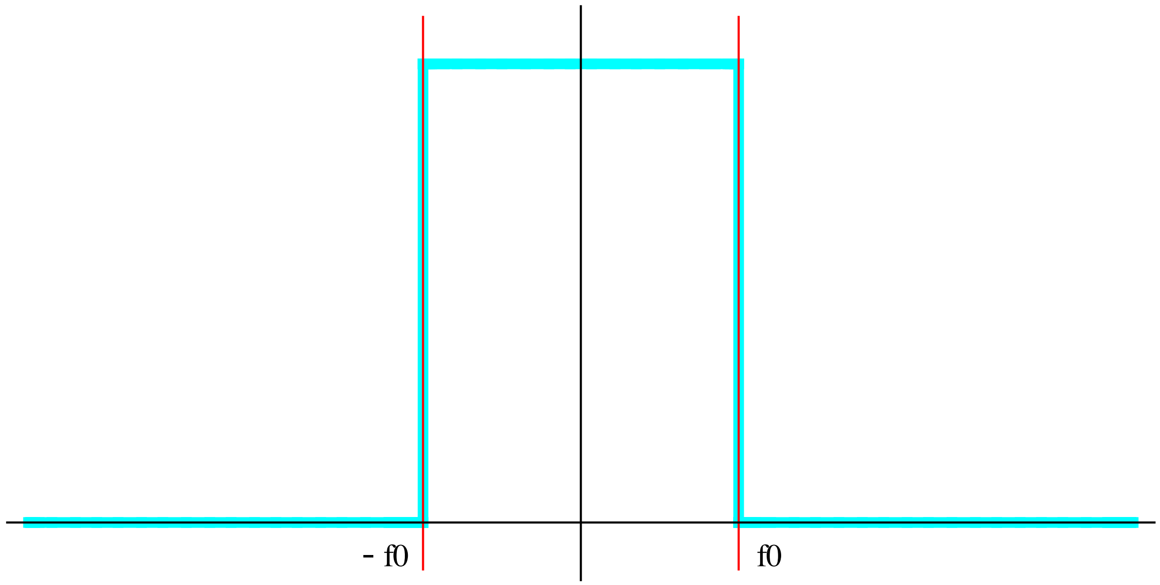


NB ora e nel seguito inseriremo uno sfondo giallo quando si presentano (porzioni di) spettri di funzioni campionate.

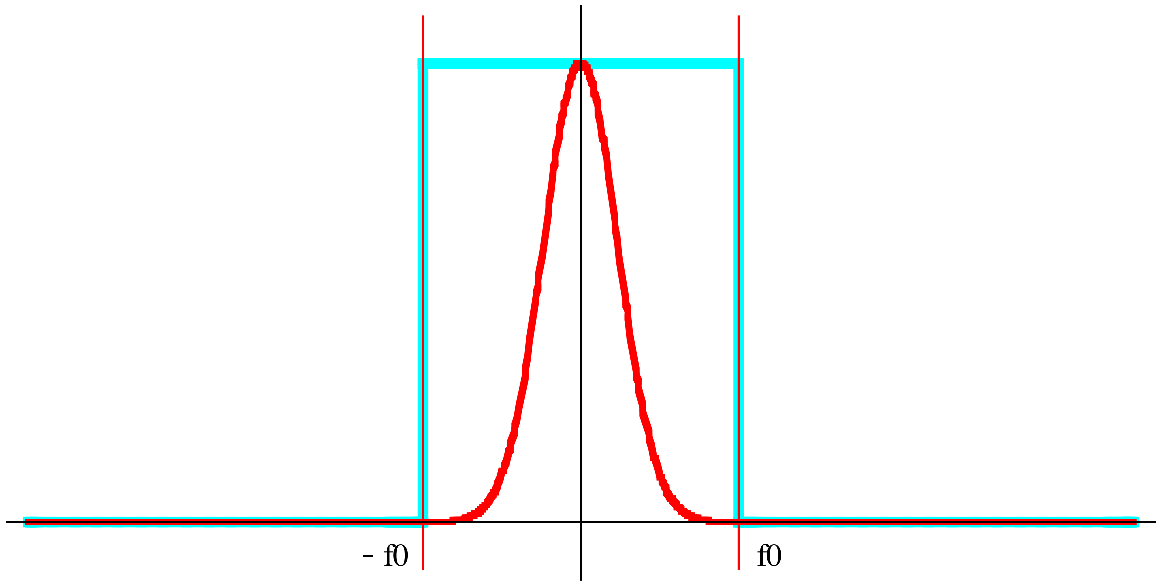
Interpolare la funzione $s_c(t)$ con un sinc

$$g(t) = \frac{\Delta \sin \frac{\pi t}{\Delta}}{\pi t}$$

la cui trasformata $G(2\pi f)$ è un impulso rettangolare



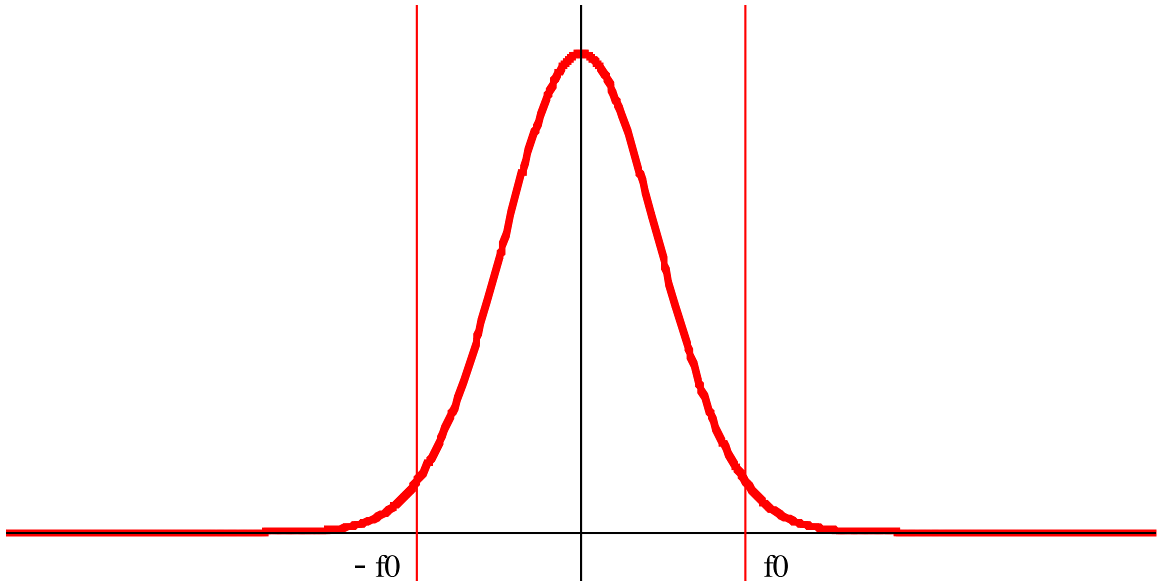
equivale, nel dominio della frequenza, a moltiplicare punto a punto $S_c(2\pi f)$ per $G(2\pi f)$



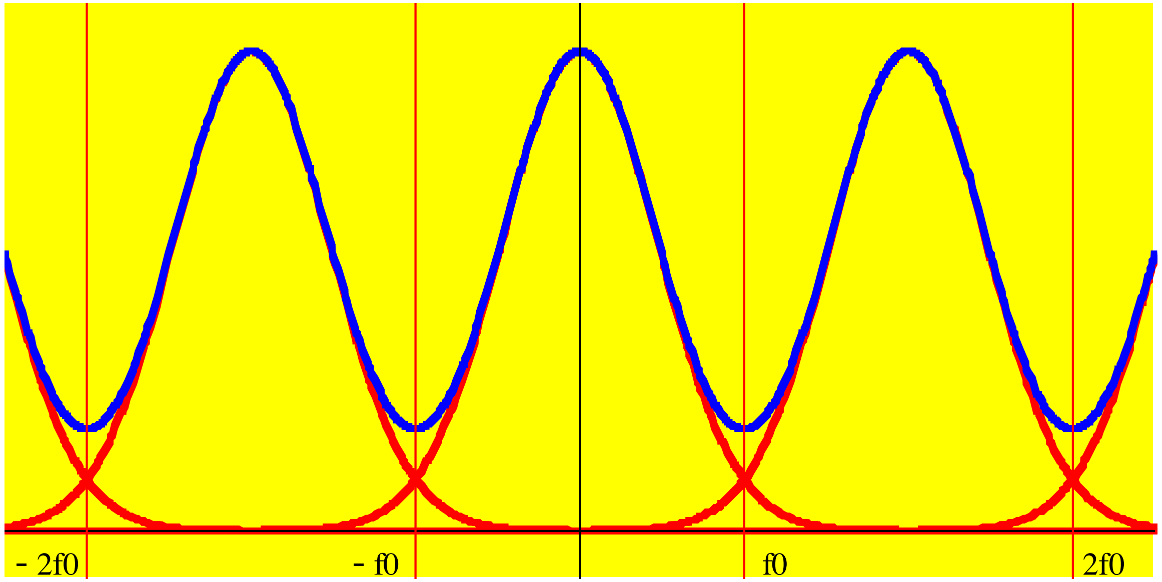
ottenendo esattamente la trasformata $S(2\pi f)$ della funzione di partenza.

Il fenomeno dell'Aliasing

È importante analizzare cosa succede se si va a campionare con intervallo Δ un segnale la cui trasformata non è limitata in banda entro $\pm\ 1/(2\Delta)$.



La parte di spettro che deborda dalla banda critica viene ribaltata e va a sporcare lo spettro "buono" ottenendo un segnala corrotto in cui compaiono frequenze fantasma da cui il nome d i **aliasing** dato al fenomeno.



Per evitare l'aliasing prima di ogni campionamento è necessario anteporre un filtraggio **anti-alias** che assicuri che il segnale che viene campionato sia correttamente limitato in banda.

Considerazioni pratiche

Il Teorema del Campionamento è un risultato fondamentale di Teoria dell'Informazione, insieme al Teorema di Shannon (che interessa solo marginalmente l'Hi-FI) è la base di tutte le applicazioni dell'informatica alle telecomunicazioni. Naturalmente come tutti i risultati teorici abbastanza importanti da essere noti al di fuori della ristretta cerchia degli addetti ai lavori viene usato a sproposito e il suo significato viene spesso frainteso.

Il Teorema del Campionamento garantisce solo che un segnale infinito, di larghezza di banda limitata, campionato per tutta la sua durata infinita (producendo quindi una quantità infinita di numeri reali a precisione infinita) può essere ricostruito esattamente utilizzando un combinazione lineare dei suoi infiniti campioni con funzioni di lunghezza infinita.

È la sagra dell'infinito ed è chiaro che stiamo ancora parlando di segni di lapis su un pezzo di carta. Credere come accadde nei primi tempi del digitale che il Teorema del Campionamento garantisca che tutti i CD-player suonino nello stesso modo perché ricostruiscono perfettamente il segnale di partenza è ingenuo oltre che errato.

Nelle lezioni seguenti vedremo quali approssimazioni valgono nel caso del trattamento pratico dei segnali audio digitali, quali sono le tecniche usate per questo trattamento e le basi matematiche su cui si fondano.